METEO-FRANCE
ECOLE NATIONALE DE LA METEOROLOGIE

CONCOURS EXTERNE 1998
D'ELEVE-INGENIEUR DES TRAVAUX DE LA METEOROLOGIE

-:-:-:-:-:-

EPREUVE OBLIGATOIRE A OPTION :

MATHEMATIQUES (II)

Durée : 4 heures **Coefficient : 4**

-:-:-:-:-:-

Le soin dans la présentation et la rigueur des raisonnements interviennent dans la notation.

NOTATIONS ET RAPPELS.

Soit n $\in \mathbf{N}^*$, $(a, b) \in \mathbf{Z}^*$, on dit que a est congru à b modulo n, et on note $a \equiv b[n]$ si et seulement si n divise $b - a$.

Pour $(a, b) \in \mathbf{Z}^* \times \mathbf{Z}^*$, on note $a \wedge b = \text{pgcd}(a, b)$ et $a \vee b = \text{ppcm}(a, b)$.

On note $\mathbf{Z}/n\mathbf{z}$ l'ensemble quotient de $\mathbf{Z}$ par la relation $\equiv [n]$. $\mathbf{Z}/n\mathbf{z}$ est un ensemble fini, à n éléments : $\mathbf{Z}/n\mathbf{z} = \left\{\bar{0}, \bar{1}, \ldots\ldots, \overline{n-1}\right\}$.

On définit les deux lois de composition interne usuelles dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{z}$, notées + et . par :
$\forall (x, y) \in \mathbf{Z}^2, \bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y}$ et $\bar{x}.\bar{y} = \overline{xy}$.

Il est facile de montrer (non demandé) que ($\mathbf{Z}/n\mathbf{z}$, +, .) est un anneau commutatif.

- PREMIERE PARTIE -

1) Lister les éléments inversibles (en précisant leur inverse) de $\mathbf{Z}/6\mathbf{z}$ et ceux de $\mathbf{Z}/13\mathbf{z}$.

2)Soit $p \in \mathbf{N}^* - \{1, 2, 3, 4\}$. Montrer que si p et $p + 2$ sont premiers, alors $p \equiv -1$ [6].

3) Montrer que le polynôme $X^2 - \bar{5}$ est irréductible sur $\mathbf{Z}/13\mathbf{z}[X]$.

T. S. V. P. ➔

- DEUXIEME PARTIE -

Soit $(A, *, \Diamond)$ un anneau d'élément unité 1_A, on note $U(A) = \{a \in A \mid \exists c \in A, a \Diamond c = 1_A\}$ l'ensemble des éléments inversibles de A.

1) Montrer que $(U(A), \Diamond)$ est un groupe.

2) Montrer en utilisant le théorème de Bezout que le groupe $U(\mathbf{Z}/n\mathbf{z})$ est l'ensemble :
$V = \{\bar{a} \in \mathbf{Z}/n\mathbf{z} \mid a \wedge n = 1\}$.

3) Pour n $\in \mathbb{N}^*$ montrer que l'ensemble des diviseurs de zéro de $\mathbf{Z}/n\mathbf{z}$ est l'ensemble :
$D = \{\bar{a} \in \mathbf{Z}/n\mathbf{z} - \{\bar{0}\} \mid a \wedge n \neq 1\}$.

- TROISIEME PARTIE -

On note $\mathbb{K}_{13}$ l'ensemble $\mathbf{Z}/13\mathbf{z} \times \mathbf{Z}/13\mathbf{z}$ que l'on munit des lois de composition suivantes :

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$(x, y) \bullet (x', y') = (xx' + \bar{5}yy', xy' + x'y)$$

Pour $\alpha \in \mathbb{K}_{13}$, on note $\alpha^2 = \alpha \bullet \alpha$.

1) Montrer que $(\mathbb{K}_{13}, \oplus, \bullet)$ est un corps commutatif à 169 éléments.

2) Soit $H_{13} = \{(x,\bar{0}) \in \mathbf{Z}/13\mathbf{z} \times \mathbf{Z}/13\mathbf{z}\}$ un sous-ensemble de $\mathbb{K}_{13}$. Montrer que $(H_{13}, \oplus, \bullet)$ est un sous-corps isomorphe à $(\mathbf{Z}/13\mathbf{z}, +, .)$.

3) Désormais, on identifie H_{13} et $\mathbf{Z}/13\mathbf{z}$ en identifiant x et $(x,\bar{0})$. Trouver les éléments α de $\mathbb{K}_{13}$ tels que $\alpha^2 = \bar{5}$ et factoriser $X^2 - \bar{5}$ dans $\mathbb{K}_{13}[X]$.

- QUATRIEME PARTIE -

Soit $(G, .)$ un groupe commutatif fini, x un élément de G, on note $o(x)$ l'ordre de l'élément x de G.

1) Soit $x \in G$, $l \in \mathbb{N}^*$ tels que $o(x) = l$. Vérifier que x^{-1} $(= x^{l-1})$ est aussi d'ordre l.

2) Soient maintenant a et b deux éléments de G d'ordre m et n respectivement. Montrer que si $m \wedge n = 1$, alors $o(a.b) = mn$.

T. S. V. P. ➔

3) Montrer que, même si m et n ne sont pas premiers entre eux, il existe c dans G tel que $o(c) = m \vee n$. On pourra remarquer que ce ppcm s'écrit $m'.n'$, avec m' divisant m, n' divisant n, et m' et n' premiers entre eux.

4) Considérons le ppcm r des ordres des éléments de G. r est parfois appelé l'exposant de G, c'est le plus petit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 1$, $\forall x \in G$. Montrer qu'il existe $c \in G$, tel que $o(c) = r$.

5) Soit $(F, +, .)$ un corps commutatif et $(G, .)$ un sous groupe fini de $(F^*, .)$, montrer que G est cyclique.

6) On note $\mathbb{K}_{13}^* = \mathbb{K}_{13} - \left\{(\overline{0},\overline{0})\right\}$. Déterminer les 48 générateurs du groupe $\left(\mathbb{K}_{13}^*, \bullet\right)$.